

БРОЈЕВИ

NUMBERS

МИЛАНА АНДРИЈАШЕВИЋ, VIII разред, Основна школа „Братство јединство“
Панчево Регионални центар за таленте „Михајло Пупин“ Панчево

МАРИЈА МИХАЈЛОВ, професор математике, Регионални центар за таленте
„Михајло Пупин“ Панчево

РЕЗИМЕ

У овом раду описане су неке класе занимљивих бројева које срећемо у теорији бројева (парни и непарни бројеви, прости и сложени, савршени, пријатељски, срећни и несрећни бројеви, палиндроми, нарцисоидни бројеви, фигуративни, бројеви близанци, бројеви који су добили имена по познатим математичарима и физичарима, велики бројеви и необивни бројеви).

Кључне речи: бројеви, математика

ABSTRACT

This paper describes some classes of interesting numbers that we encounter in number theory (even and odd numbers, simple and complex, perfect, friendly, lucky and unlucky numbers, palindromes, narcissistic numbers, figurative, twin numbers, numbers named after famous mathematicians and physicists, big numbers and odd number).

Keywords: numbers, mathematics

УВОД

Бројеви у математици

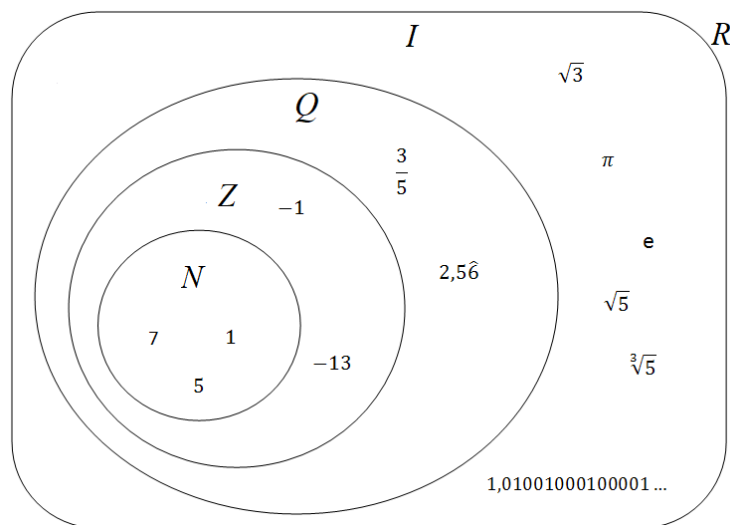
У свакодневном животу срећемо се са разним бројевима природним, целим, рационалним, ирационалним, реалним итд. Кроз историју разне културе су бројевима додељивале неке мистичне особине због њиховог великог значаја у описивању природе. Математика не признаје такве ставове, али је такво тумачење бројева занимљиво. Древни астролози су тврдили да, знајући датум и време рођења особе, можемо направити комплетну мапу, која ће одражавати кључне догађаје у његовом животу. Антички филозофи су веровали да ће вредности комбинација бројева које чине датум рођења детета имати озбиљан утицај на његов карактер и судбину. Питагорејци бројеве „корене“ (архе) бића, схватили на простран – геометријски начин. Тако је број један претстављен као тачка и прво слово алфабета – алфа (α), број два је права и претстављен је словом бета (β); три јесте површина – гама (γ), а четири чврсто тело – делта (δ). Два јединства тачке стварају линију, три јединства тачке претстављају раван, док четири јединства тачке чине геометријско чврсто тело. За Питагорејце Један изражава јединство свега, Два је разлика и супротност, Три је јединство јединства и разлика, Четири њихово оваплоћење...

Шта је број?

Формирање појма броја је континуиран процес који полази од материјалне реалности а завршава се апстрактним генерализацијама. Број није само појам који се изучава у школама, већ представља и средство за спознавање реалног света и средство за функционисање човека у том свету.

Природни бројеви представљају основу из које се могу добити сви други скупови бројева. Помоћу природних бројева уводе се цели, рационални, реални бројеви. Сваки од наведених скупова бројева садржи претходни.

Скуп природних бројева се означава са $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ и често се проширује нулом тј. $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Проширивањем скупа природних бројева добијамо скуп целих бројева који означавамо са $Z = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Рационалан број се дефинише као количник два цела броја и скуп рационалних бројева означавамо са $Q = \{\frac{a}{b} \mid a \in Z \wedge b \in Z \wedge b \neq 0\}$. Број је ирационалан ако није количник било кога пара целих бројева и те бројеве означавамо са I . Такву дефиницију задавољавају бројеви: $\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \pi, \dots$. Унија скупова рационалних и ирационалних бројева чине скуп реалних бројева које означавамо са R .



Слика 1. Графички приказ скупа реалних бројева
Picture 1. Graphical representation of a set of real numbers

РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА И ДИСКУСИЈА

Парни и непарни бројеви

Природне бројеве делимо на **парне** и **непарне**. Парни (облика $2 \cdot k, k \in N$): 2, 4, 6, 8, 10, 12... Непарни (облика $2 \cdot k + 1, k \in N$): 1, 3, 5, 7, 9, 11...

Подела бројева на парне и непарне датира још из доба старе Грчке. Према Питагорејцима, бројеви су имали своје особине, укључујући поделу на мушке и женске бројеве. Непарни бројеви су мушки бројеви чији је протип монада-јединство, почетак свега. Парни бројеви сматрани су женским бројевима, а њихов прототип био је двада. Мушки бројеви су по Питагори а и данас се слично тумачење користи у астрологији, јаки, позитивни, срећни, дневни, док су женски бројеви су слаби, негативни, несрећни и ноћни.

Прости и сложени бројеви

Природни бројеви већи од 1 који имају тачно два делиоца, број 1 и самог себе, називају се **прости бројеви**. Прости бројеви су: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31... Природни бројеви већи од 1 који имају више од два делиоца називају се **сложени бројеви**. Сложени бројеви су: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16...

Број 1 има само једног делиоца и то је број 1. Број 1 није ни прост ни сложен.

Број 2 је једини паран број који је прост.

Два броја су **узајамно проста** ако немају више заједничких делилаца осим броја 1. Узајамно прости бројеви су: 3 и 7, 13 и 47, 5 и 29... Бројеви 15 и 8 нису прости, али јесу узајамно прости.

Занимљивости о простим бројевима

Емирп је прост број који читан здесна на лево опет даје прост број (енг.Prime $\leftrightarrow$ emirP). Емирпи су 37 и 73. Када окренемо цифре већине простих бројева, добијамо сложене бројеве. Рецимо, 43 постаје 34. Неколико првих емирпа су: 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 107, 113, ... Показало се да је и 1597 емирп јер је и 7951 такође прост број.

Изопрости бројеви су прости бројеви чије су све цифре једнаке. Најмањи такав број је 11. Следећи би био 1 111 111 111 111 111 111 па 11 111 111 111 111 111 111 111. Следећи такав број има чак 1031 цифру.

Пи-прост број је прост број који садржи првих 38 цифара броја π . То је број 31 415 926 535 897 932 384 626 433 832 795 028 841.

Савршени бројеви

Савршен број је онај број који је једнак збиру својих правих делилаца (укључујући и јединицу).

Прва четири савршена броја су:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$$

Пети савршен број, који је откривен 1456. године, јесте 33 550 336. До сада је откривено само 49 савршених бројева, а последњи од њих, који је пронађен 7. јануара 2016. године, у свом запису има 44 677 235 цифара.

Пријатељски бројеви

Природни бројеви a и b су **пријатељски бројеви** ако је збир правих делилаца бројева a (свих позитивних делилаца броја a , укључујући и број 1, али не рачунајући сам тај број) једнак броју b и истовремено збир правих делилаца броја b једнак броју a . Први (најмањи) пар пријатељских бројева чине 220 и 284.

Прави делиоци броја 220 су: $\{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110\}$,

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

Прави делиоци броја 284 су: $\{1, 2, 4, 71, 142\}$, $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.

Познати француски математичар Пјер де Ферма пронашао је 1636. год. други пар пријатељских бројева (17296, 18416), а Рене Декарт, чувени француски математичар пронашао је 1638. год. пар пријатељских бројева који чине (9363584, 9437056).

Срећни и несрећни бројеви

Француска математичарка Софија Герман прва разврставала бројеве по „срећи“. Она је велики допринос теорији бројева, а посебно теорији простих бројева. Број је **срећан** ако се збир квадрата свих његових цифара завршава бројем 1. Број 23 је срећан јер је :

$$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$$1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$$

$$1^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1.$$

Број је **несрећан** ако се збир квадрата свих његових цифара не завршава бројем 1.

Број 24 је срећан јер је :

$$2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$$

$$2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4$$

$$4^2 = 16$$

$$1^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37$$

$$3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$$

$$5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$$

$$8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$$

$$1^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 16 + 25 = 42$$

$$4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$$

Долазимо до броја 20 и примећујемо да се све понавља.

Срећни бројеви мањи од 100 су : 1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94, 97, 100.

Палиндроми

Нека су a и b природни бројеви код којих су прва и последња цифра различите од нуле. Ако су цифре броја b такве да чине цифре броја a написане обрнутим редом, тада кажемо да је број b симетричан броју a . Парови симетричних бројева су 25 и 52, 173 и 371, 1405 и 5041 итд. Постоје и природни бројеви коју су симетрични сами себи, односно који се не мењају када им се цифре испишу у обрнутом поретку.

Бројеви који су симетрични сами себи, односно који се не мењају када им се цифре испишу у обрнутом поретку називају се **палиндроми**.

Палиндроми су 22, 313, 4334, 55555, ...

Нарцисоидни бројеви

Нарцисоидни број (назван по Нарцису из грчког мита, згодном ловцу који се заљубио у сопствени одраз) је такав да ако узмете сваку цифру броја, подигните их одвојено до степена колико цифара затим их саберите, враћате се на свој оригинални број.

На примеер број 153.

153 има три цифре, па сваку од њих подижемо на трећи степе и саберемо их.

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153.$$

9474 са своје четири цифре.

$$9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4 = 9474.$$

Постоји само 88 нарцисоидних бројева у распону од најмањег, 0, па до највећег, 115 132 219 018 763 992 565 095 597 973 971 522 401 који има 39 цифара.

Фигуративни бројеви

Фигуративни бројеви представљају геометријски приступ дефинисању бројева где долази визуелизације између бројева и објеката. Овакав начин приказивања бројева започео је Питагора у Старој Грчкој.

Једном тачкицом или квадратићем приказан је број 1, а слагањем тачкица или квадратића у одређене облике добијамо остале природне бројеве. Посебним распоредом и слагањем тачкица обликују се фигуративни бројеви. Они омогућавају јасно визуелно представљање алгебарских својстава и односа.

Уколико једној тачки додамо две тачке добијамо једнакостраничан троугао. Затим, додајући три тачке претходном једнакостраничном троуглу добијамо трећи по реду троугаони број 6. Број 10 је четврти по реду троугаони број.

Низ троугаоних бројева гласи: 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

На основу наведених особина троугаоних бројева изводимо формуле:

$$T_1 = 1 ,$$

$$T_n = T_{n-1} + n .$$



Слика 2. Троугаони бројеви
Picture 2. Triangular numbers

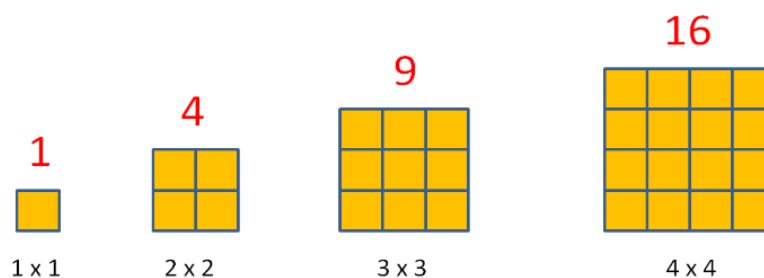
Кад једној тачки додајемо три тачке, добијамо квадрат. Кад том квадрату придодемо пет тачака, затим седам итд., добијамо све квадратне бројеве, то јест бројеве које можемо приказати тачки распоређеним у равни у облику квадрата. Квадратни број добија се множењем неког броја самог са собом.

Низ квадратних бројева гласи: 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

На основу наведених особина квадратних бројева изводимо формуле

$$K_1 = 1 ,$$

$$K_n = K_{n-1} + (2n - 1) .$$



Слика 3. Квадратни бројеви
Picture 3. Square numbers

Бројеви близанци

Бројеви близанци-парови су парови простих бројева који се разликују за 2. Парови близанаца су 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 8999 и 9001, 9719 и 9721, 9929 и 9931, 10005629 и 10005631, 10006427 и 10006429. Не зна се да ли међу простим бројевима има бесконачно много близанаца-парова.

Бројеви који су добили имена по познатим математичарима и физичарима

Фермаови бројеви

Бројеви облика $F_n = 2^{2^n} + 1$, где је n произвољан ненегативан цео број зову се **Фермаови бројеви**. За првих 5 вредности од n он је добио редом бројеве: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ и повером утврдио да су сви они прости. Ферма је изрекао хипотезу да је и за сваки природан број $n \geq 5$ број F_n прост. Међутим, Ојлер је показао да је број F_5 производ два проста броја, дакле сложен број.

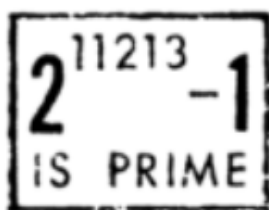
$$F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

Од тада је много математичког труда, а последњих деценија и много рачунарског времена уложено у факторисање Фермаових бројева вишег реда. Мада се зна да Фермаова хипотеза није тачна, не зна се да ли је осим F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 још неки Фермаов број прост.

Мерсенови бројеви

Бројеви облика $M_p = 2^p - 1$, где је p прост број зову се **Мерсенови бројеви**. Мерсен је тврдио да су 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 и 257 једини прости бројеви, не већи од 257, за које је број $2^p - 1$ прост. Међутим, ова листа садржи грешке које су откривене много времена после смрти Мерсена.

Занимљивост везана за Мерсенове бројеве је та да је 1963. године у Сједињеним Америчким Државама креиран је поштански печат на ком стоји запис да је број $2^{11213} - 1$ прост број.



Слика 4. Поштански печат у САД из 1963. године
Picture 4. Postal stamp in the United States from 1963

Ојлеров број или Неперова константа

Ојлеров број представља математичку константу која се обично означава са e . Вредност Ојлеровог броја је приближно 2,718281828459045... Број e је ирационалан, реалан и трансцендентан број. Он се појављује у многим математичким и научним контекстима, као што су вероватноћа, статистика, финансије и многи други.

Армстронгови бројеви

Армстронгови бројеви су добили име по математичару Михаелу Ф. Армстроугу. У математици, Армстронгове бројеве представљају сви n -тоцифрени природни бројеви који су једнаки збиру n -тих степена цифара тог броја. Ови бројеви зависе од бројевног система у коме су записани, јер једна иста вредност записана у различитим бројевним системима има различите цифре у свом запису, а некад чак и различит број цифара. На пример:

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$$
$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$

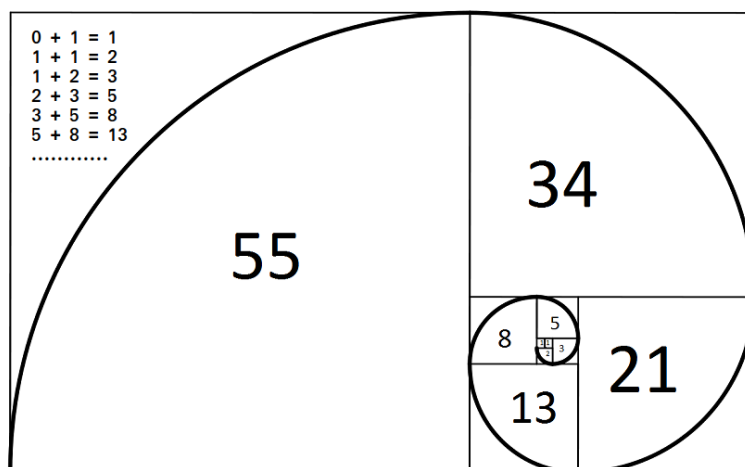
Остали примери Армстронгових бројева су: 370, 371, 407...

Фибоначијеви бројеви

Фибоначијеви бројеви су низ бројева који почиње са 0 и 1, а сваки следећи број у низу је збир претходна два. Формално, низ Фибоначијевих бројева може се дефинисати рекурзивно као:

$$F(0) = 0$$
$$F(1) = 1$$
$$F(n) = F(n-1) + F(n-2), \text{ за } n > 1$$

Првих неколико Фибоначијевих бројева су: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, итд. Ови бројеви су пронађени у многим природним феноменима и имају разне примене у математици, информатичком програмирању, економији, уметности и другим областима. Фибоначијеви бројеви често формирају спиралне облике познате као Фибоначијева спирала, која се јавља у разним биолошким и природним системима.



Слика 5. Фибоначијева спирала
Picture 5. Fibonacci spiral

Велики бројеви

Велики бројеви су тешки за дефинисање и још тежи за руковање. Савремени рачунари имају довољно меморије и брзине да могу баратати са прилично импресивним бројкама. Као резултат тога данас можемо приказивати бројеве о којима су ранији математичари могли само сањати.

Милион- $1.000.000=10^6$

Билион- $1.000.000.000.000 = 10^{12}$ -око седамдесет билиона износи бруто национални производ свих држава на земаљској кугли.,

Билијарда- $1.000.000.000.000.000 = 10^{15}$ -број који се користи за мерење производних линија глобалних компанија.

Квинтилијарда- 10^{33} -то је највећи степен од 10 за кога се зна да се може представити као умножак два броја који сами не садрже цифру нула:

$$10^{33} = 2^{33} \cdot 5^{33} = 8.589.934.592 \cdot 116.415.321.826.934.814.453.125$$

Децилијарда- 10^{63} -број који се користи за одређивање броја звезда у видљивом свемиру.

Центилион - 10^{303} -број са 303 нуле; сви бајтови на интернету, када се преброје, не би достигли ову цифру.

Граховов број-Граховов број је највећи број са именом који има примену и највећи број икада коришћен за решавање неког математичког проблема. Тај број назван по математичару Роналду Грејму, није трансцендентан и, иако је незамисливо велик, има коначну вредност. Није га могуће записати, његово директно израчунавање је немогуће.

Необични бројеви

Шехерезадин број

Шехерезада је популарна личност из најпознатијег зборника прича арапских народ „Хиљаду и једна ноћ”. Знајући необичну слабост цара Шахријара да одсеца главе својим женама после прве брачне ноћи, Шехерезада је причала цару из ноћи у ноћ чудесне приче, заустављајући се у саму зору на најзанимљивијем месту. Цар, желећи да чује наставак, одлагао је њено погубљење до следећег јутра. Тако је Шехерезада причала цару бајке равно хиљаду једну и ноћ. После хиљаду и једне ноћи, задобила је цареву љубав и он јој је поклонио живот. Шехерезада је постала царева жена, а цео народ је славио њену лепоту и мудрост. Цар је наредио да се запишу све Шехерезадине приче и тако сачувају од заборавља.

Са математичке тачке гледишта, број 1001 има неколико интересантних својстава. Дељив је бројевима 7, 11 и 13, па је број 1001 производ три узастопна проста броја,

$$1001=71113$$

Занимљиво је да се производ било ког троцифреног броја са 1001 може добити и тако што се тај број напише два пута.

На пример, $1001111=111111$. Како је $111=337$, то се број 111111 лако може раставити на просте чиниоце: $111111=37111337$.

Такси број 1729

Број 1729 је познат као **Харди-Раманујанов број -такси број**, након једне анегдоте британског математичара Хардија, у којој је посетио индијског математичара Сринивас Раманујана у болници. Он је препричао њихов разговор:

"Сећам се да сам једном путовао да га посетим док је био болестан у Путнеју. Возио сам се у таксију број 1729 и поменуо да мислим да је то један веома досадан број. "Не", одговорио је, "то је веома занимљив број. То је најмањи број који је могуће изразити као збир два куба на два различита начина". "

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$



Слика 6. Такси број
Picture 6. Taxi number

Бројеви вампира

Број је познат као **вамписки број** ако његове цифре, преуредимо у два нова броја са истим бројем цифара као и сваки други, а затим их помножите да бисте се вратили на првобитни број.

На пример: 1260. Ове четири цифре могу се преуредити у два двоцифрена броја 21 и 60, који ако се помноже дају одговор од 1260. То чини 1260 вамписким бројем чији су очњаци 21 и 60. $1395 = 15 \times 93$

Ђаволски број 666

Мицхаел Стифел (1486 – 1567) је био највећи немачки алгебриста шеснаестог века, најпознатији по свом делу *Arithmetica integra* (1544). Био је склон сензацијама. Он је извео следећи низ мистичних закључивања:

1. Латинско име папе Lea X је Leo Decimus.
2. Ово се може написати као Leo De CIM Vs, где су велика слова L, D, C, I, M, V наглашена као цифре римског бројног система ($M = 1000$, $D = 500$, $C = 100$, $L = 50$, $X = 10$, $V = 5$, $I = 1$).

3. Затим је слова преуредио у опадајући низ: MDCLVI

4. Стифел је додао X иза L (за Leo X), а изоставио M, јер оно означава Мистерију, и на тај начин добио DCLXVI (6 римских бројева у редоследу од највећег ка најмањем) што је римски запис броја 666.

Тако је Стифел добио „ђаволски број“ 666 из Књиге откровења (последња књига Новог Завета), „доказавши“ на тај начин да је Leo X ђаво. Отуда у народу назив за број 666999 – зло и наопако.

Број алеф-нула

Број Алеф-нула ($\aleph_0$) је кардинални број који се користи у теорији скупова и представља кардиналност најмањег бесконачног скупа. То је најмањи бесконачни кардинални број и представља величину бесконачних скупова као што су скуп свих природних бројева, скуп свих рационалних бројева и слично. Алеф-нула је такође познат као "континуум", а означава се симболом $\aleph_0$.

ЗАКЉУЧАК

У овом истраживачком раду је приказана разноликост и комплексност бројева. Овај истраживачки рад открива да бројеви нису само апстрактни ентитет, већ имају различите особине и улоге које се протежу кроз математику и свакодневни живот. Наставак истраживања ових карактеристика може пружити још дубље разумевање њихове природе и примене у различитим подручјима.

ЛИТЕРАТУРА

- [1.] М. Дејић, Б. Дејић, *Математичке послестице*, Лагуна, 2020
- [2.] М. Дејић, Б. Дејић, *Математичке авантуре*, Креативни центар, 2023
- [3.] К. Дресер, *Математика у свакодневном животу*, Лагуна, 2016
- [4.] Н. Икодиновић, С. Димитријевић, *Математика 5, уџбеник за пети разред*, Клетт, 2023
- [5.] Н. Икодиновић, С. Димитријевић, *Математика 6, уџбеник за шести разред*, Клетт, 2022
- [6.] Н. Икодиновић, С. Димитријевић, *Математика 7, уџбеник за шести разред*, Клетт, 2020
- [7.] С. Јешић, Ј. Благојевић, *Математика за 7. разред основне школе*, Герундијум, 2020
- [8.] <https://matematika.pmf.uns.ac.rs/wp-content/uploads/zavrshni-radovi/matematika/VladimirGolub.pdf>
- [9.] <https://srednjeskole.edukacija.rs/zanimljiva-matematika/najveci-brojevi-u-matematici>
- [10.] <https://matematikitalent.mk/uploads/books/VNVZb-Jhqy9FkNXnmHimQ.pdf>
- [11.] <https://sladjinamatematika.wordpress.com/2011/11/11/10/>
- [12.] <https://www.opsteobrazovanje.in.rs/matematika/grahamov-broj/>